Chapitre 21

Systèmes électriques capacitifs

Paragraphe 1 - Intensité d'un courant électrique en régime variable

Remarque préliminaire

Toutes les grandeurs dépendantes du temps sont notées avec des lettres minuscules. L'indication « t minuscule écrite entre parenthèses » est omise pour alléger les notations lors des calculs, par exemple $\mathrm{U_R}$ représente $\mathrm{U_R(t)}$.

Paragraphe 1.1 - Définition

L'**intensité d'un courant électrique** $\mathrm{i(t)}$ en un point donné d'un circuit correspond au débit de charges électriques à une date donnée, c'est-à-dire à la dérivée de la charge électrique q minuscule par rapport au temps calculée à cette date t minuscule notée :

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}$$

Unités SI :

i minuscule s'exprime en ampère de symbole A majuscule (A)

La dérivée de la charge électrique q minuscule par rapport au temps, noté $\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}$, s'exprime en coulomb par seconde notée C majuscule point s minuscule exposant moins un $(\mathrm{C}.s^{-1})$.

Point Maths

En mathématiques, le nombre dérivé d'une fonction f en x est :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En physique-chimie, la dérivée par rapport au temps de q minuscule à la date t s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}$$

Paragraphe 1.2 - Comportement capacitif

Un **comportement capacitif** correspond à l'accumulation de charges électriques de signes opposés sur des surfaces en regard l'une de l'autre. Ce comportement se manifeste dans une branche d'un circuit par une intensité du courant électrique qui varie, sur une durée caractéristique, pendant le **régime transitoire** avant d'atteindre une valeur nulle lors du **régime stationnaire**.

Paragraphe 2 - Modèle du condensateur

Paragraphe 2.1 - Définition

Un **condensateur** est un système de deux surfaces conductrices en regard, appelées armatures, séparées par un matériau isolant. Le condensateur a un comportement capacitif : lorsqu'il est soumis à une tension électrique non nulle, les charges électriques q_A et q_B portées par ses deux armatures A majuscule et B majuscule, mesurées en coulomb, sont opposées :

$$q_A = -q_B$$

Paragraphe 2.2 - Relation entre charge et tension

La charge q minuscule portée par l'armature A majuscule d'un condensateur de capacité C majuscule est proportionnelle à la tension u_C :

$$u_C = u_{AB}$$

$$q = C \times u_C$$

Unités SI :

q minuscule est en coulomb de symbole C majuscule (C)

u_C est en volt de symbole V majuscule (V)

C majuscule est en farad de symbole F majuscule (F)

Paragraphe 2.3 - Capacité d’un condensateur

À l’exception des supercondensateurs dont les capacités sont de l’ordre de cent farads (100 F), celles des condensateurs usuels sont plutôt comprises entre la dizaine de picofarads ($1\mathrm{pF} = 10^{-12}\ \mathrm{F}$) et la dizaine de millifarads ($1\mathrm{mF} = 10^{-3}\ \mathrm{F}$).

Paragraphe 3 - Modèle du circuit RC série

Paragraphe 3.1 - Charge d’un condensateur par une source idéale de tension

La charge d’un condensateur C majuscule par une source idéale de tension continue se fait à travers une résistance R majuscule qui va limiter l’intensité maximale du courant électrique dans le circuit série : on parle alors de circuit ou de dipôle RC série.

Lorsque l’interrupteur est en position 1, un courant d’intensité i minuscule dépendant du temps traverse le circuit.

En mathématiques, une **équation différentielle linéaire du premier ordre** à coefficients constants avec second membre constant est une équation différentielle du type : $\mathrm{y}' + \mathrm{ay} = \mathrm{b}$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\mathrm{y} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{ax}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

A majuscule est telle qu’en zéro, y est égale à :

$$\mathrm{y}(0) = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

Raisonnement à retenir

Obtention de l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

La loi des mailles appliquée à la maille 1 permet d'écrire l'équation 1 :

$$u_C + u_R - E = 0$$

La loi d'Ohm aux bornes de R majuscule conduit à l'expression 2 :

$$u_R = R \times i$$

La relation entre intensité et charge constitue l'expression 3 :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La relation entre charge et tension constitue l'expression 4 :

$$q = C \times u_C$$

En combinant les expressions 2, 3 et 4 pour exprimer u_R en fonction de u minuscule indice C majuscule u_C, on obtient :

$$u_R = R \times i = R \times \frac{dq}{dt} = R \times \frac{d(C \times u_C)}{dt}$$

Comme C majuscule est constant, on aboutit à l'expression 5 suivante :

$$u_R = RC \times \frac{d(u_C)}{dt}$$

En remplaçant l'expression 5 dans l'équation 1, on obtient :

$$u_C + u_R - E = u_C + RC \times \frac{d(u_C)}{dt} - E$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{d(u_C)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau} \text{ avec } \tau = RC$$

u_C est donc la solution d'une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant** du type :

$$y' + ay = b$$

avec a minuscule égal à : $a = \frac{1}{\tau}$ et b minuscule égal à : $b = \frac{E}{\tau}$

L'ensemble des solutions est de la forme :

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

où A est une constante qui se détermine par les conditions initiales.

Détermination de la constante A majuscule à l'aide des conditions initiales

À $t_0 = 0$ s, le condensateur est déchargé et donc $u_C(0) = 0$, ce qui donne

$$u_C(0) = Ae^{-\frac{0}{\tau}} + E = A + E$$

D'où A majuscule est égale à moins E majuscule : $A = -E$.

La solution particulière du problème est donc :

$$u_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

Soit

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Le passage du régime transitoire au régime stationnaire se fait à partir de la date cinq tau (5τ) minuscules.

En effet, lorsque t minuscule est supérieur à 5 multiplié par tau minuscule ($t \geq 5\tau$),

$$u_C(t) \geq E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E(1 - e^{-5}) = 0{,}993 \times E$$

Donc pour $t \geq 5\tau$, $u_C(t) = E$ à moins de 1 % près : on peut considérer que la tension $u_C(t)$ est constante, ce qui correspond à un régime stationnaire.

De plus, lorsque $t = \tau$, $u_C(t) = E(1 - e^{-1}) = 0{,}63 \times E$ (à deux chiffres significatifs) soit 63 % de E majuscule.

Enfin, on peut montrer que la tangente à la représentation graphique de $u_C(t)$ en fonction du temps à la date $t = 0\ s$ coupe l'asymptote horizontale d'ordonnée E majuscule à la date $t = \tau$.

Paragraphe 3.2 - Décharge d’un condensateur

Lorsque l’interrupteur est en position 2, le circuit RC est en court-circuit et le condensateur se décharge à travers la résistance R majuscule.

Raisonnement à retenir

Obtention de l'équation différentielle vérifiée par la tension u minuscule indice C majuscule aux bornes du condensateur

La loi des mailles appliquée à la maille 2 permet d'écrire l'équation 6 :

$$u_C + u_R = 0$$

En remplaçant l'expression 5 dans l'équation 6, on obtient :

$$u_C + RC \times \frac{d(u_C)}{dt} = 0$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{d(u_C)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0 \text{ avec } \tau = RC$$

L'ensemble des solutions est de la forme :

$$u_C(t) = A' e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Détermination de la constante A' à l'aide des conditions initiales

À $t_0 = 0$ s, le condensateur est chargé sous la tension E majuscule atteinte après la charge et donc : $u_C(0) = E$

Soit

$$u_C(0) = A'^{e^{-\frac{0}{\tau}}} = E$$

D'où : $A' = E$

La solution particulière du problème est donc :

$$u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Paragraphe 3.3 - Temps caractéristique

Dans les deux cas de charge et décharge du condensateur, la solution fait apparaître un terme dépendant du temps en exponentielle de moins t minuscule divisé par tau minuscule : $e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Or, $-\frac{t}{\tau}$ devant être sans dimension, la constante $\tau = RC$ a la dimension d'un temps.

Le **temps caractéristique** du circuit RC série est : $\tau = RC$

Unités SI :

τ en seconde de symbole s

R majuscule en ohm de symbole oméga majuscule (Ω)

C en Farad de symbole F majuscule (F)

Paragraphe 4 - Capteurs capacitifs

De nombreux capteurs capacitifs sont présents dans divers systèmes (smartphones, appareils de mesures ou industriels, automobiles, etc.).

Le principe de fonctionnement d'un capteur capacitif est le suivant : la capacité C majuscule d'un condensateur dépend de sa géométrie et de l'isolant entre ses armatures. Cette propriété est utilisée pour réaliser des capteurs capacitifs. Si la capacité C majuscule varie en fonction d'une grandeur physique X majuscule, comme la position d minuscule ou l'accélération a minuscule, alors sa mesure (par l'intermédiaire du temps caractéristique tau minuscule par exemple) donne accès à la valeur de la grandeur physique X majuscule, fonction de C majuscule.

L'utilisation d'un microcontrôleur peut permettre la mesure du temps caractéristique tau minuscule égal au produit de R majuscule par C majuscule : $\tau = \mathrm{RC}$ et l'affichage direct de la grandeur X.