Chapitre 13

Mouvements des satellites et des planètes

Paragraphe 1 – Mouvements circulaires

Définitions

Le mouvement d'un point M est **circulaire** si sa trajectoire est un arc de cercle ou un cercle. Il est **uniforme** si la valeur v de sa vitesse est constante au cours du temps, et **accéléré** si elle varie au cours du temps.

Les mouvements circulaires sont étudiés ici dans le repère de Frenet.

Soit un point M dont la trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R. Le **repère de Frenet** est le repère d'origine mobile $\mathrm{M(t)}$ et de vecteurs unitaires :

• $\overrightarrow{\mathrm{u_t}}(\mathrm{t})$: tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement ;

• $\overrightarrow{\mathrm{u_n}}(\mathrm{t})$: selon la direction (OM), orienté vers le centre O.

Remarque concernant le vocabulaire

Dans le repère de Frenet, les coordonnées d'un vecteur sont aussi appelées **composante tangentielle** (selon le vecteur u indice t : $\overrightarrow{\mathrm{u_t}}$) et **composante normale** (selon le vecteur u indice n : $\overrightarrow{\mathrm{u_n}}$).

Vitesse et accélération dans le repère de Frenet

Dans le repère de Frenet $(M(t); \overrightarrow{u_t}(t); \overrightarrow{u_n}(t))$, en notant $v(t)$ la norme du vecteur vitesse du point M au cours du temps, les coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ du point M en mouvement circulaire sont :

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_t(t) = v(t) \\ v_n(t) = 0 \end{cases}$$

D'où $\vec{v}(t) = v(t)\overrightarrow{u_t}(t)$

Les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du point M en mouvement circulaire sont :

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_t(t) = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n(t) = \dfrac{(v(t))^2}{R} \end{cases}$$

D'où :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t}(t) + \frac{(v(t))^2}{R}\overrightarrow{u_n}(t)$$

Comme $v_n(t) = 0$, le vecteur vitesse est perpendiculaire à tout instant au rayon OM. Il est, comme pour tout mouvement, tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement $(v_t(t) = v(t) > 0)$.

Comme $a_n(t) > 0$, le vecteur accélération est orienté à tout instant vers l'intérieur de la trajectoire.

Cas d'un mouvement circulaire uniforme

Si le mouvement circulaire est **uniforme**, la valeur v de la vitesse est constante ($v(t) = v = cste$) quelle que soit la date t donc la dérivée de v par rapport au temps est nulle ($\frac{dv}{dt} = 0$), soit $a_t(t) = 0$.

La norme du vecteur accélération vaut ainsi :

$$\vec{a}(t) = a_n(t) = \frac{v^2}{R} = \text{cste}$$

Le vecteur accélération est orienté selon le vecteur $\overrightarrow{u_n}(t)$ donc à tout instant vers le centre O de la trajectoire : il est dit **centripète**.

Le vecteur accélération d'un point M en mouvement **circulaire uniforme** est un vecteur **centripète** de **norme *a* constante** :

$$a = \frac{v^2}{R}$$

*a*vec les **unités du Système international** (SI) suivantes :

v la valeur de la vitesse en mètre par seconde ($m.s^{-1}$)

R le rayon de la trajectoire en mètre (m)

a la valeur de l'accélération en mètre par seconde au carré ($m.s^{-2}$).

Paragraphe 2 – Systèmes en orbite circulaire

Cadre de l'étude

Mouvement dans un champ de gravitation newtonien

D'après la loi d'interaction gravitationnelle, un astre de masse M indice astre ($\mathrm{M}_{\mathrm{astre}}$) et de centre de masse O, crée en tout point M de l'espace un champ de gravitation $\vec{\mathcal{g}}$ tel que :

$$\vec{\mathcal{g}} = \frac{\mathrm{GM}_{\mathrm{astre}}}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{u_n}}$$

avec les **unités du Système international** :

$\mathrm{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$ la constante de gravitation

M indice astre ($\mathrm{M}_{\mathrm{astre}}$) la masse de l'astre en kilogramme (kg)

OM la distance en mètre (m)

$\overrightarrow{\mathrm{u_n}}$ le vecteur unitaire de direction OM orienté de M vers O.

Lorsque le **champ de gravitation** dans lequel évolue un système de masse m n'est dû qu'à un seul astre attracteur de masse $\mathrm{M}_{\mathrm{astre}} > \mathrm{m}$, le champ est dit **newtonien** et le système n'est soumis qu'à **l'unique force de gravitation** $\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\vec{\mathcal{g}}$.

Référentiel astrocentrique

Le **référentiel astrocentrique** est le référentiel, lié au solide imaginaire contenant le centre de masse O de l'astre attracteur et trois étoiles éloignées supposées fixes. Ce référentiel est supposé **galiléen** pour l'étude du mouvement.

L'**orbite** est le nom donné à la trajectoire fermée du centre de masse M du système dans le référentiel astrocentrique.

Remarque

Lorsque cette trajectoire est un cercle de centre O et de rayon $\mathrm{R} = \mathrm{OM}$, l'orbite est dite **circulaire**.

Remarque

Dans **l'approximation des orbites circulaires**, on s'intéresse aux satellites dont le centre de masse a un mouvement circulaire autour d'une planète et aux planètes pour lesquelles il est possible d'assimiler le mouvement de leur centre de masse à un mouvement circulaire.

Vecteurs vitesse et accélération

Dans le référentiel astrocentrique supposé galiléen, la deuxième loi de Newton est appliquée au système de masse m, en orbite circulaire de rayon R autour d'un astre de centre de masse O et de masse $\mathrm{M_{astre}}$. L'accélération $\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t})$ du centre de masse M du système est alors reliée à la somme vectorielle des forces qui lui sont appliquées par : $\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = \sum \overrightarrow{\mathrm{F_{ext}}}$.

Sachant que la somme vectorielle des forces extérieures exercées sur le système est égale à m multiplié par le vecteur G : $\sum \overrightarrow{\mathrm{F_{ext}}} = \mathrm{m}\vec{\mathcal{g}}$., on a :

$$\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = \mathrm{m}\vec{\mathcal{g}} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{GM_{astre}}}{\mathrm{OM}^2}\overrightarrow{\mathrm{u_n}}(t)$$

soit

$$\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{GM_{astre}}}{\mathrm{R}^2}\overrightarrow{\mathrm{u_n}}(t)$$

Dans le repère de Frenet $(\mathrm{M}; \overrightarrow{\mathrm{u_t}}; \overrightarrow{\mathrm{u_n}})$, les coordonnées du **vecteur accélération** $\vec{\mathrm{a}}$ du centre de masse d'un système en orbite circulaire sont :

$$\vec{\mathrm{a}}\begin{cases} \mathrm{a_t} = 0 \\ \mathrm{a_n} = \dfrac{\mathrm{GM_{astre}}}{\mathrm{R}^2} \end{cases}$$

avec, en utilisant les unités du **Système international** :

a_t et a_n en mètre par seconde au carré ($m.s^{-2}$)

$G = 6{,}67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$ la constante de gravitation

M_{astre} la masse de l'astre attracteur en kilogramme (kg)

R le rayon de l'orbite en mètre (m)

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est **centripète** de **norme constante :**

$$a = \frac{GM_{astre}}{R^2}$$

Or, pour un mouvement circulaire de rayon R, dans le repère de Frenet, les coordonnées du vecteur accélération s'écrivent :

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} \text{ et } a_n(t) = \frac{v^2}{R}$$

$\frac{dv}{dt} = 0$ soit $v = cste$: le mouvement est uniforme

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM_{astre}}{R^2} \text{ soit } v = \sqrt{\frac{GM_{astre}}{R}}$$

Le **vecteur vitesse** $\vec{v}(t)$ du centre de masse M d'un système en orbite circulaire est **perpendiculaire au rayon** en M et de **norme v constante**, indépendante de la masse m du système :

$$v = \sqrt{\frac{GM_{astre}}{R}}$$

avec, en utilisant les unités du **Système international :**

v la valeur de la vitesse en mètre par seconde $(m.s^{-1})$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$ la constante de gravitation

M_{astre} la masse de l'astre attracteur en kilogramme (kg)

R le rayon de l'orbite en mètre (m)

Période de révolution

La **période de révolution** T est la durée d'une révolution du système autour de l'astre attracteur.

Pour une orbite circulaire de rayon R, la distance *d* parcourue pendant une révolution est la circonférence de l'orbite, soit $d = 2\pi R$.

Le mouvement étant uniforme : $v = \frac{d}{T} = \frac{2\pi R}{T}$.

Et ainsi

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

comme

$$v = \sqrt{\frac{GM_{astre}}{R}}$$

$$T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_{astre}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_{astre}}}$$

La **période de révolution** T du centre de masse d'un système en orbite circulaire vérifie donc la relation :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_{astre}}}$$

avec, en utilisant les unités du **Système international** :

T en seconde (s)

$G = 6{,}67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$ la constante de gravitation

M_{astre} la masse de l'astre attracteur en kilogramme (kg)

R le rayon de l'orbite en mètre (m)

Éviter les erreurs

Attention à ne pas confondre **période de révolution**, qui est la durée que met un système pour parcourir une fois son orbite, et **période de rotation**, qui est la durée d'un tour du système sur lui-même autour de son axe.

Satellite géostationnaire

Un satellite est **géostationnaire** s'il est immobile dans le référentiel terrestre en restant à la verticale du même point du globe terrestre.

Dans le référentiel géocentrique :

– son orbite est circulaire et dans le plan équatorial de la Terre ;

– sa période de révolution T vaut 24 heures.

Application

Ces caractéristiques permettent de déterminer son altitude h.

En notant $\mathrm{R_T} = 6{,}4 \times 10^6\ \mathrm{m}$ le rayon terrestre et $\mathrm{M_T} = 6{,}0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$ la masse de la Terre, on a :

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{(\mathrm{R_T} + h)^3}{\mathrm{GM_T}}}$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{T}^2}{4\pi^2} = \frac{(\mathrm{R_T} + h)^3}{\mathrm{GM_T}}$$

D'où :

$$\mathrm{h} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{T}^2 \times \mathrm{GM_T}}{4\pi^2}} - \mathrm{R_T}$$

L'application numérique donne alors : $\mathrm{h} = 36 \times 10^6$ mètres.

Paragraphe 3 – Lois de Kepler

Les lois empiriques énoncées par le mathématicien allemand Johannes Kepler (né en 1571, mort en 1630) pour décrire le mouvement des planètes du Système solaire s'étendent aux satellites en orbite autour d'une planète.

Énoncés des lois de Kepler

Première loi de Kepler ou loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

Point maths

Une ellipse est l'ensemble des points M du plan dont la somme des distances à deux points fixes, les foyers F_1 et F_2 , est une constante : $\mathrm{MF}_1 + \mathrm{MF}_2 = 2\mathrm{a}$.

Une ellipse dont les foyers sont confondus est un cercle de rayon $\mathrm{R} = \mathrm{a}$.

Deuxième loi de Kepler ou loi des aires

Le segment $[SP]$ qui relie le centre S du Soleil au centre P de la planète balaie des **aires égales** pendant des **durées égales**.

Troisième loi de Kepler ou loi des périodes

Le quotient du carré de la période de révolution T d'une planète par le cube de la longueur a du demi grand axe de son orbite est égal à une même constante pour toutes les planètes du Système solaire.

Cas des orbites circulaires

Soit un système en orbite circulaire de rayon R et de période de révolution T autour d'un astre attracteur de masse M_{astre} et de centre de masse O :

– selon la 1re loi de Kepler, le centre de son orbite est O ;

– selon la 2e loi de Kepler, son mouvement est uniforme ;

– selon la 3e loi de Kepler, T au carré divisé par R au cube est égal à une constante.

D'après l'étude newtonienne du mouvement d'un système en orbite circulaire de rayon *R* autour d'un astre attracteur de masse M_{astre}, sa période de révolution T vaut :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_{astre}}}$$

Ainsi :

$$T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{GM_{astre}}$$

soit :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{astre}} = k$$

Application

Détermination de la masse M indice T ($\mathbf{M_T}$) de la Terre

Dans le référentiel géocentrique, l'orbite de la Lune est quasi-circulaire de rayon $\mathrm{R} = 3{,}8 \times 10^5\ \mathrm{km}$ et sa période de révolution est T = 27 jours.

Selon la troisième loi de Kepler :

$$\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{R}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM_T}}$$

soit

$$\mathrm{M_T} = \frac{4\pi^2\mathrm{R}^3}{\mathrm{GT}^2}$$

L'application numérique donne alors : $\mathrm{M_T} = 6{,}0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$.