Chapitre 10 – Mouvements des satellites et planètes

Corrigés des parcours en autonomie

Préparer l'évaluation — 7 — 13 — 15

7 **Connaître la loi des aires**

a. D'après la 2e loi de Kepler ou loi des aires, le segment [SP], qui relie le centre du Soleil à celui de la planète, balaie des aires égales pendant des durées égales : $A = A'$.

b. Pour respecter l'égalité précédente, $P_3P_4 < P_1P_2$. La distance parcourue pendant une même durée est plus grande lorsque la planète est plus loin du Soleil. Ainsi, la vitesse n'est pas la même entre P_1 et P_2 et entre P_3 et P_4.

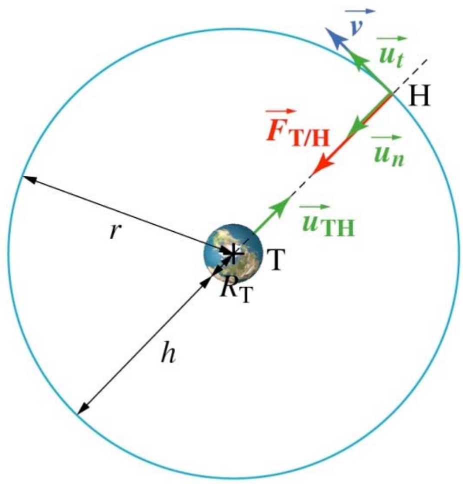
P est plus rapide sur le trajet P_1P_2.

13 **À la rencontre de la planète Mars**

Exercice résolu.

15 **Apprendre à rédiger**

a. Le système étudié est le satellite terrestre Hubble noté H sur le schéma, de masse m, qui décrit, dans le référentiel géocentrique galiléen, un cercle de rayon $r = R_T + h$.



b. H étant ponctuel et la Terre à répartition sphérique de masse, d'après la loi d'interaction gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F_{T/H}} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{u_{TH}}$$

$\overrightarrow{u_{TH}}$ est un vecteur unitaire de direction (TH) orienté de T vers H.

$\overrightarrow{F_{T/H}}$ est donc appliquée en H, radiale et centripète (figure) et de valeur $F_{T/H} = G\frac{mM_T}{r^2}$.

c. En considérant que *m* est constante, l'application de deuxième loi de Newton donne la relation :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{T/H}}} = m \cdot \vec{a} \qquad \text{soit} \qquad \vec{a} = -G\frac{M_{\mathrm{T}}}{r^2}\overrightarrow{u_{\mathrm{TH}}}$$

$\vec{a}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{u_{\mathrm{TH}}}$. $\vec{a}$ a pour direction la droite (TH) confondue avec le rayon de cercle correspondant à la trajectoire.
Le mouvement de Hubble est circulaire et son vecteur accélération est radial.
Le mouvement de Hubble est donc uniforme.
Ce que l'on peut vérifier de la manière suivante :
dans (H, $\overrightarrow{u_t}$, $\overrightarrow{u_n}$), $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_{\mathrm{TH}}}$,

on peut ainsi écrire : $\vec{a}\left|\begin{array}{l} 0 \\ G\dfrac{M_{\mathrm{T}}}{r^2} \end{array}\right.$ et $\vec{a}\left|\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right.$

L'égalité des coordonnées de $\vec{a}$ sur (H,$\overrightarrow{u_t}$) conduit à la relation $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ valable à chaque instant soit : v = cte. Le mouvement est donc uniforme.

d. L'égalité des coordonnées de $\vec{a}$ sur (H, $\overrightarrow{u_n}$) conduit à la relation :

$$G\frac{M_{\mathrm{T}}}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

soit, après simplification et sachant que de $r = R_{\mathrm{T}} + h$:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}} + h}}$$

A.N. : $v = \sqrt{\dfrac{6,67\times10^{-11}\times5,97\times10^{24}}{6,38\times10^{6} + 600\times10^{3}}} = 7,55\times10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

e. La période de révolution est la durée de parcours d'une circonférence de longueur $L = 2\pi r$. Le mouvement étant uniforme :

$$v = \frac{L}{T_{\mathrm{H}}}$$

d'où : $$T_{\mathrm{H}} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{GM_{\mathrm{T}}}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_{\mathrm{T}}}} \text{ soit } T_{\mathrm{H}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_{\mathrm{T}}+h)^3}{GM_{\mathrm{T}}}}$$

$$T_{\mathrm{H}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6,38\times10^{6} + 600\times10^{3})^3}{6,67\times10^{-11}\times5,97\times10^{24}}} = 5,81\times10^{3}\,\mathrm{s}$$

soit un écart relatif de 3 % (faible) par rapport à l'indication du texte que l'on peut donc considérer comme correcte.

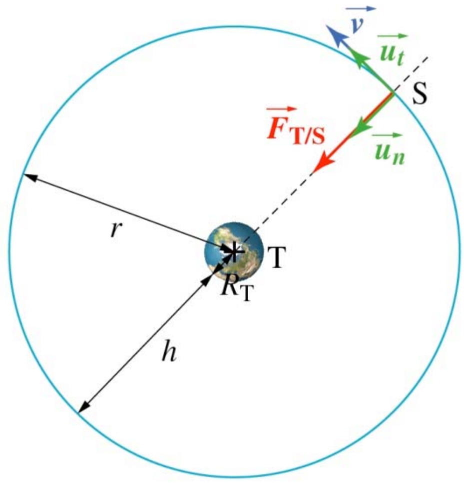
Approfondir — 26 — 27 — 29

26 Apprendre à chercher

Application des lois de Newton

D'après la loi d'interaction gravitationnelle, S étant ponctuel et la Terre à répartition sphérique de masse :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{T/S}}} = +G\frac{mM_{\mathrm{T}}}{r?}\overrightarrow{u_{\mathrm{n}}} \quad (1)$$



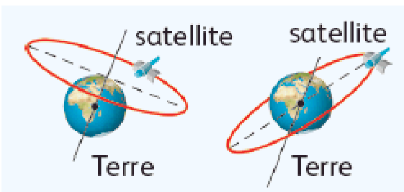
Deuxième loi de Newton

En considérant que m est constante, l'application de deuxième loi de Newton dans le référentiel géocentrique galiléen donne la relation :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{T/S}}} = m \cdot \overrightarrow{a_{\mathrm{S}}} \ (2)$$

Étude du plan de la trajectoire

Les trajectoires ci-dessous ne peuvent donc convenir :



En effet, la relation (2) précédente implique que l'accélération et la force de gravitation sont colinéaires. Or, la trajectoire de la figure de gauche ne permet pas de respecter cette condition. L'accélération doit être contenue dans le plan de la trajectoire circulaire ; elle ne peut également pas passer par le centre de la Terre comme $\overrightarrow{F_{\mathrm{T/S}}}$ (1).

D'autre part, pour être immobile dans un référentiel terrestre, le satellite doit rester immobile par rapport à un point de la surface de la Terre et donc tourner dans un plan parallèle ou confondu avec celui de la trajectoire de ce point. Ce plan doit donc être perpendiculaire à l'axe des pôles. La trajectoire de la figure de droite ne convient pas non plus.

Finalement, le mouvement d'un satellite géostationnaire s'effectue dans le plan équatorial de la Terre.

<u>Accélération, vitesse et période</u>

Les relations (1) et (2) conduisent à :

$$\overrightarrow{a_S} = G\frac{M_T}{r^2}\overrightarrow{u_n} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{a_S} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_n}$$

Dans le repère de Frenet (S, $\overrightarrow{u_t}$, $\overrightarrow{u_n}$), on peut ainsi écrire : $\vec{a}\left|\begin{matrix} 0 \\ G\dfrac{M_T}{r^2}\end{matrix}\right.$ et $\vec{a}\left|\begin{matrix} \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{v^2}{r}\end{matrix}\right.$

L'égalité des coordonnées de $\vec{a}$ sur (S, $\overrightarrow{u_n}$) conduit à la relation :

$$G\frac{M_T}{r^2} = \frac{{v_S}^2}{r} \quad \text{soit, après simplification } v_S = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$$

T est la période de révolution. C'est la durée de parcours d'une circonférence de longueur $L = 2\pi r$. Le mouvement étant uniforme :

$$v_S = \frac{L}{T} \text{ soit } T = \frac{2\pi r}{v_S} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM_T}} \text{ soit } T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$$

<u>Altitude</u>

$$T^2 = 4\pi^2\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2GM_T}{4\pi^2}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2GM_T}{4\pi^2}} - R_T$$

A.N. : pour être immobile dans un référentiel terrestre, le satellite doit rester immobile par rapport à un point de la surface de la Terre et donc tourner avec la même période ; la période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à la période de rotation de la Terre :

$$T = T_{\text{Terre}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}{4\pi^2}} - 6{,}38\times10^6 = 3{,}58\times10^7 \text{ m} \approx 36\,000 \text{ km}$$

Ainsi, un satellite géostationnaire orbite à environ 36 000 km de la surface de la Terre dans le plan équatorial de la Terre.

27 Champ de gravitation

1. a. On étudie tout d'abord la navette dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen. Au décollage, en négligeant les frottements, la navette subit :

– son poids $\vec{P}$;

– la poussée $\vec{F_P}$.

b. En négligeant la variation de masse, l'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$\vec{P} + \vec{F_P} = m\vec{a_G}$$

En projection sur $(O, \vec{k})$, on a :

$$P_z + F_{Pz} = m \cdot a_z$$
$$-mg + F_P = m \cdot a$$

soit : $a = \dfrac{F_P}{m} - g$

A.N. : $a = \dfrac{32{,}4 \times 10^6}{2{,}041 \times 10^6} - 9{,}8 = 6{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

c. Les conditions initiales sont pour $t_0 = 0$ s : $z(t_0) = 0$ m et $v_z(t_0) = 0$ m·s^{-1}.

En supposant l'accélération constante : $a_z = +a$.

Or, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$. Par intégration, $v_z = at + C$.

D'après les conditions initiales : $v_z(t_0) = a \times 0 + C = 0$.

Ainsi, $v_z = at$.

Or $v_z = \dfrac{dz}{dt}$. Par intégration, $z = ½\, at^2 + C$.

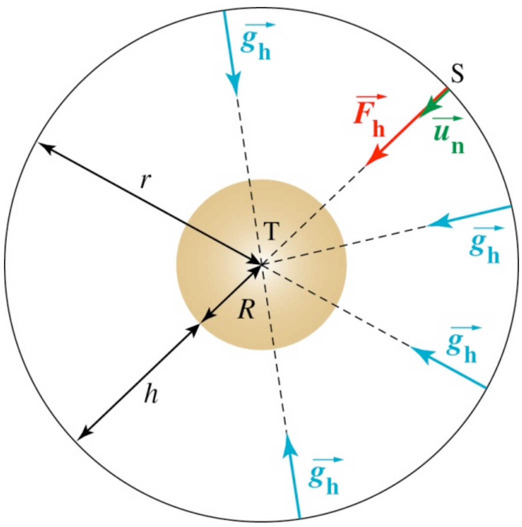
D'après les conditions initiales $z(t_0) = 1/2\ a \times 0 + C = 0$.

Ainsi, $z = 1/2\ at^2$.

La distance parcourue pendant $t = 2$ s est :

$$d = ½ \times 6{,}1 \times 2^2 = 1 \times 10^1 \text{ m (12 m)}$$

2. a.



b. La navette étant satellisée, on la note S. On la considère comme étant ponctuelle et la Terre à répartition sphérique de masse.

D'après la loi d'interaction gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F_h} = +G\frac{mM_\mathrm{T}}{r^2}\overrightarrow{u_\mathrm{n}} \quad (1)$$

Ainsi, comme $\overrightarrow{g_h} = \dfrac{\overrightarrow{F_h}}{m}$ alors $\overrightarrow{g_h} = G\dfrac{M_\mathrm{T}}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_\mathrm{n}}$

c. D'après l'expression précédente :

$$g_h = G\frac{M_T}{(R+h)^2} \text{ et } g_0 = G\frac{M_\mathrm{T}}{(R)^2}$$

ce qui implique : $g_0R^2 = GM_\mathrm{T}$ et donc $g_h = \dfrac{R^2}{(R+h)^2}g_0$

d. Dans la base de Frenet (S, $\overrightarrow{u_t}$, $\overrightarrow{u_n}$), $\vec{a}\left|\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\[2mm] \dfrac{v^2}{r}\end{array}\right.$

ce qui donne pour la navette en mouvement uniforme : $\overrightarrow{a}\left|\begin{array}{l}0\\ \dfrac{v^2}{r}\end{array}\right.$.

Ainsi $a = \dfrac{v^2}{r}$.

e. L'application de deuxième loi de Newton appliquée à la navette satellisée dans le référentiel géocentrique galiléen conduit à :

$$\overrightarrow{F_h} = m\vec{a}$$

ce qui implique :

$F_h = ma$ soit $G\dfrac{mM_T}{r^2} = m\dfrac{\mathrm{v}^2}{r}$

soit $v^2 = G\dfrac{M_\mathrm{T}}{r} \Rightarrow v^2 = \dfrac{g_0R^2}{r} \Rightarrow v^2 = g_h\dfrac{(R+h)^2}{(R+h)} = g_h(R+h)$

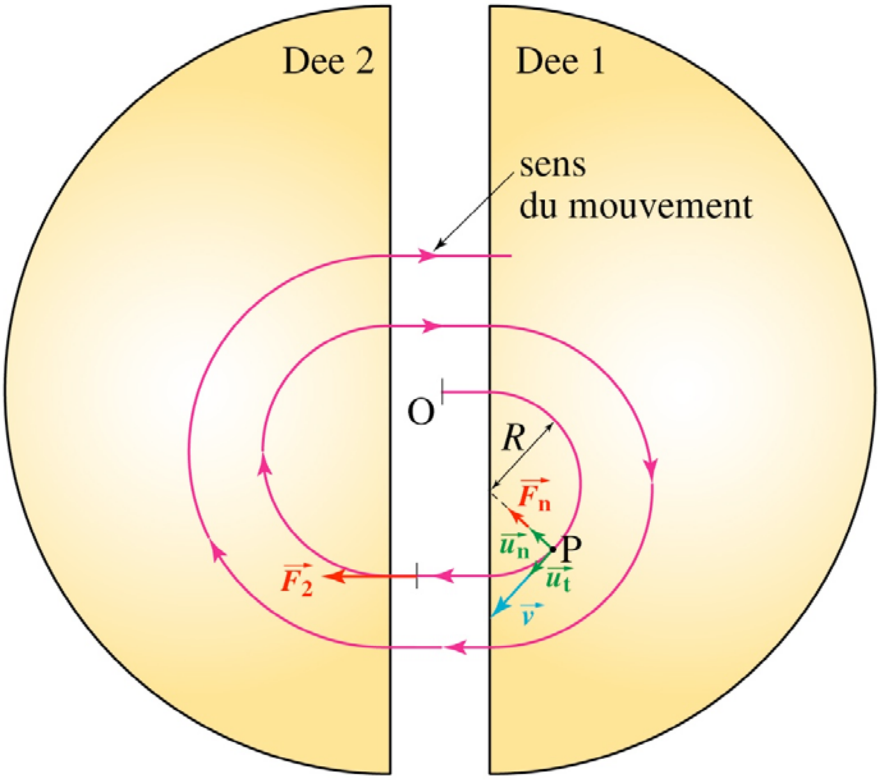
f. $g_h = \dfrac{R^2}{(R+h)^2}g_0 = \dfrac{(6{,}38\times10^6)^2}{(6{,}38\times10^6+296\times10^3)^2}9{,}8 = 9{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

$v = \sqrt{g_h(R+h)} = \sqrt{9{,}0\times(6{,}38\times10^6+296\times10^3)} = 7{,}8\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

L'écart relatif par rapport à la donnée du texte est inférieur à 0,5 %. Les valeurs sont compatibles.

29 Champ magnétique

a. On étudie dans le référentiel terrestre, galiléen pendant la durée d'étude, la particule P chargée. Dans un dee, P est supposée être soumise uniquement à la force magnétique notée $\overrightarrow{F_m}$. D'après le document, cette force magnétique est radiale (direction confondue avec le rayon de la trajectoire de P dans le dee) et centripète (orientée vers le centre de la trajectoire).



c. En considérant que la masse m de P constante et l'application de deuxième loi de Newton à P dans un dee donne la relation $\overrightarrow{F_m} = m.\vec{a}$ (1).

Dans le repère de Frenet (P, $\vec{u_t}$, $\vec{u_n}$), on peut ainsi écrire : $\overrightarrow{F_m}\begin{vmatrix} 0 \\ +F_m = |q|\text{v}B \end{vmatrix}$ et $\vec{a}\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{v^2}{R} \end{vmatrix}$

La projection de (1) sur (P, $\vec{u_t}$) conduit à la relation $0 = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ à chaque instant du mouvement de P dans un dee soit v = cte : le mouvement de la particule est uniforme dans un dee.

c. La projection de (1) sur (P, $\vec{u_n}$) conduit à la relation $|q|\text{v}B = m\dfrac{v^2}{R}$ soit $R = \dfrac{mv}{|q|B}$.

Entre les dees, la particule est soumise à une force électrique qui l'accélère. Sa vitesse augmente donc le rayon de la trajectoire dans un dee augmente d'un dee au suivant.

d. Pendant un demi-tour, P parcourt une demi-circonférence de longueur L = πR. Le mouvement étant uniforme :

$$v = \frac{L}{t_{1/2}} \text{ soit } t_{1/2} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi \dfrac{mv}{|q|B}}{v} = \frac{\pi m}{|q|B}$$

La fréquence est : $f = \frac{1}{T} =$ avec $T = 2t_{1/2}$ soit $f = \frac{|q|B}{2\pi m}$

e. *m, q, B* étant constant, la fréquence est constante et ne dépend pas de *v* : inutile d'adapter la fréquence à la vitesse de la particule.

f. Pour conserver une trajectoire fixe, R doit rester constant en dépit de l'augmentation de *v*. D'après $\mathrm{R} = \frac{mv}{|q|B}$, le champ magnétique doit donc augmenter si *v* augmente pour maintenir R constant.